TD 6 : Nombres complexes Indications

Forme algébrique, conjugué, module

1 ★ Mettre sous forme algébrique les complexes :

$$z = \frac{1}{i} \qquad u = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

Trivial, cf les exemples du cours si nécessaire.

2 ★ On note $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \qquad \overline{f(z)} = \frac{1}{f(\overline{z})}$$

C'est une simple vérification en utilisant les propriétés du conjugué.

3 ★★ Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer de deux façons l'équivalence suivante :

$$|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$$

1) Raisonner par double implication, en posant si nécessaire $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Raisonner par équivalences successives, en faisant apparaitre des conjugués au moyen de la formule $|u|^2 = u\overline{u}$.

1) Le sens réciproque se fait directement. Le sens direct nécessite de poser $z = a+ib$ et d'en déduire des conditions sur a ou b qui permettent d'affirmer que $z \in \mathbb{R}$.
2) Partir de $|z-i| = |z+i|$ et mettre au carré.

4 ★★ Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\forall u, v \in \mathbb{C} \qquad |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Utiliser l'identité remarquable en étant scrupuleux sur les détails.

5 ★★ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que :

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$$

Dans le sens indirect, utiliser le fait que $u \in \mathbb{R} \iff u = \overline{u}$ pour conclure.

Dans le sens direct, poser $a \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z-i}{1-iz} = a$, puis exprimer z en fonction de a.

6 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad |z| = |1-z|$

On peut poser $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et trouver une condition sur a et b.

On peut aussi élever au carré et utiliser le fait que : $\forall u \in \mathbb{C} \qquad u\overline{u} = |u|^2$

7 ★★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2}$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les sommes (réelles) :

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^p (2p+1)$$
$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + (-1)^{p+1} (2p)$$

1) La formule se montre par récurrence. Écrivez bien le résultat auquel vous voulez arriver !
2) Écrire les quelques premiers termes de $\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1}$

8 ★★★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = x \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 & \begin{cases} f(z+z') = & f(z) + f(z') \\ f(zz') = & f(z) f(z') \end{cases} \end{cases}$$

Poser $a = f(i)$ et déterminer les valeurs possibles pour a.

9 ★★★ Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, on a :

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité.
Poser $A = u+v$ et $B = u-v$ et réexprimer ce que l'on veut montrer en fonction de A et de B.

Forme trigonométrique et trigonométrie

10 ★★☆ Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants (avec $\theta \in \mathbb{R}$ fixé) :

1) $1-\sqrt{2}$
2) $-5i$
3) $1-i$
4) $\dfrac{3i}{1-i}$
5) $(1+i)^5$
6) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Penser à mettre sous forme trigonométrique avant de calculer des produits / quotients / puissances, puisque ces opérations sont triviales à faire en forme trigonométrique.

11 ★★ Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

1) $(1+i)^n \in \mathbb{R}$
2) $\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R}$

Reformuler en passant par l'argument.

12 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^3 = \overline{z}^2$
2) $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$

Passer par la forme trigonométrique en étant toujours très rigoureux !

13 ★★☆ On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z + \overline{z} = z^3$. On raisonne par analyse-synthèse et on considère $z \in \mathbb{C}$ solution.

1) Trouver une solution z_0 évidente. Dans la suite, on suppose que $z \neq z_0$.
2) Justifier qu'il existe $\theta \in \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right]$ et $r > 0$ tel que $z = re^{i\theta}$.
3) On suppose $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Aboutir à une contradiction.
4) On suppose $\theta \in \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$. Écrire $z + \overline{z}$ sous forme trigonométrique. En déduire que z ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs qu'on précisera.
5) On suppose $\theta \in \left] \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right]$. Même question.
6) Conclure.

L'exercice est assez guidé : il s'agit essentiellement de manipuler la forme trigonométrique, et notamment la “pseudo-identification”.

14 ★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme trigonométrique les complexes :

1) $1 + \cos\theta + i\sin\theta$
2) $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

Utiliser l'angle moitié.

15 ★★ Linéariser l'expression $\sin^5 x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \sin^5 x$.
Appliquer la méthode du cours.

16 ★★☆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$$

On pourra éventuellement écrire chaque sinus comme une parties imaginaire d'un complexe bien choisi.
Reconnaitre que le membre de gauche se réécrit

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{4} e^{ikx}\right)$$

17 ★★☆ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$C_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad S_1 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

Réécrire les cosinus et sinus comme étant la partie réelle et la partie imaginaire d'une exponentielle complexe. Faites sortir cette partie réelle ou imaginaire de la somme et reconnaitre une somme usuelle.

18 ★★★☆ (*Oral Centrale*) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que

$$|1+z| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |1+z^2| \geq 1$$

Poser $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, et réexprimer les deux conditions à montrer en fonction de θ.

Racines carrées, racines n-ièmes

19 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des **réels**. On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.
2) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontrer $\quad P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow P(\overline{\alpha}) = 0$

Il suffit d'utiliser les propriétés de la conjugaison complexe.

20 ★☆ Déterminer les racines carrées des complexes suivants :

1) $z = -2$
2) $z = i$
3) $z = 1+i$
4) $z = 3+4i$
5) $z = 8-6i$
6) $z = \dfrac{-3i}{1-i\sqrt{3}}$

C'est une application de la méthode du cours. Si possible, essayer de mettre le complexe sous forme trigonométrique.

21 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^3 = 8$
2) $z^5 = 32i$
3) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
4) $z^8 - 1 = 0$
5) $(z+1)^n = 2$
6) $z^n = (z-1)^n$

Se ramener à une équation de la forme $u^n = \omega$ avec $\omega \in \mathbb{C}$, n un entier naturel et u un complexe qui dépend de z. On en déduit alors les valeurs que peut prendre u, et par suite les valeurs que peut prendre z.

22 ★★ Soit $n \geq 3$, ω une racine n-ième de l'unité et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

Remarquer que ω peut s'écrire $e^{2ik'\frac{\pi}{n}}$ avec $k' \in [\![0, n-1]\!]$.

23 ★★ On pose $\theta = 1$. Montrer que le complexe $e^{i\theta}$ est dans $\mathbb{U}$, mais qu'il n'est pas dans $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$.

Pour montrer que $e^{i\theta} \notin \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$, on pourra raisonner par l'absurde.

Polynômes et résolutions d'équations

24 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2 - (5+i)z + 8 + i = 0$
2) $z^2 - 4(1-i)z + 2(4-i) = 0$
3) $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$
(on cherchera une solution réelle en premier lieu).
4) $z^4 - z^2 + 1 = 0$

Pour la 3), on peut poser $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et chercher une valeur de a pour laquelle l'égalité est vérifiée. Ceci va fournir une première racine du polynôme.

25 ★★

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5t)$ comme une fonction polynômiale de $\cos(t)$.
2) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation $16z^4 - 20z^2 + 5 = 0$.
3) Exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ et en déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Utiliser la "Tchebychevisation", cf méthode du cours.

26 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} u+v &= 2 \\ uv &= -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u+v &= 3i \\ uv &= -1-3i \end{cases}$

c) $\begin{cases} u+v &= 4 \\ 1/u+1/v &= 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u+v &= 4 \\ u^2+v^2 &= 2 \end{cases}$

Pour b) et c), il faut se ramener à la forme du a) par des réécritures.

27 ★★☆ (*Exponentielle complexe*)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $e^z = 1 - i\sqrt{3}$
   (b) $e^z = 1 + i$
   (c) $e^z + e^{-z} = 1$
2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z| \leq e^{|z|}$. Étudier le cas d'égalité.

Poser $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et utiliser la forme trigonométrique de e^z.

28 ★☆ (*Le complexe j*) On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Mettre j sous forme trigonométrique. En déduire que $j^2 = \overline{j}$ et que $\overline{j}^2 = j$.
2) Montrer que j et $\overline{j}$ sont les racines du polynôme $1 + z + z^2$.
3) Factoriser le polynôme $z^3 - 1$.

Pour la question 3, trouver une racine évidente.

29 ★★★ On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit :

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0\ [3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\ [3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad C = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

1) Calculer les complexes suivants :

$$u = A + B + C \quad v = A + jB + j^2C \quad w = A + j^2B + jC$$

2) En déduire la valeur de A.

1) Reconnaitre dans chaque cas une somme usuelle.
2) L'exercice précédent vous fournit une propriété utile sur j : c'est une racine du polynôme $1 + z + z^2$.

Géométrie complexe

30 ★☆ Représenter graphiquement les ensembles suivants :

1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| = 5\}$
2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$
3) $\{z \in \mathbb{C}^* \mid 3\arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]\}$
4) $\left\{a + re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\right\}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ sont fixés.

Reformuler ces conditions et/ou se rattacher à des ensembles géométriques connus comme le cercle ou le disque.

31 ★★ On considère les points A, B, C affixes respectives $a = 1, b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$. Déterminer la nature du triangle ABC.
Faire un dessin et visualiser la nature de ce triangle. Puis, démontrer cela rigoureusement en passant par la caractérisation en termes d'angle orienté.

32 ★★☆ Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1) Les points d'affixe 1, z et z^2 soient alignés.
2) Les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle dont M est l'angle droit.
3) Les vecteurs d'affixe z et $\overline{z}$ sont orthogonaux.
4) Les points z, $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ sont situés sur un même cercle de centre l'origine.

Utiliser la caractérisation en termes d'angles orientés.